Les probabilités

I. Vocabulaire

Définition : Une expérience est dite **« aléatoire »** si elle vérifie deux conditions :

- Elle conduit à des résultats possibles qu'on appelle des **issues.**
- On ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

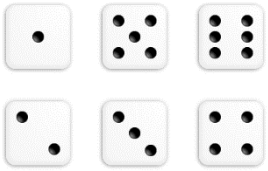


Exemple : On lance une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle tombe.
Cette expérience est aléatoire car il y a deux issues possibles : *« PILE »* ou *« FACE »* , quand on lance une pièce on ne sait pas sur quelle face elle va tomber.

Définition : Si les résultats de l'expérience ont autant de chance d'être exécuté alors on dit que l'expérience est **équiprobable.**

Exemple : Dans l'exemple précédent, si la pièce n'est pas truquée, on a autant de chance d'avoir *« PILE »* que *« FACE ».*

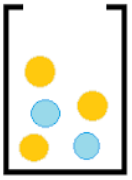
Définition : À partir d'une expérience aléatoire on peut définir ce qu'on appelle des **événements** qui sont des ensembles de résultats.



Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
« Obtenir un nombre pair » est un *événement* car c'est l'ensemble des issues suivantes :
« obtenir 2 » ou « obtenir 4 » ou « obtenir 6 »

II. Probabilité

Définition : Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité** de l'événement.



Exemple : Si on tire au hasard une boule dans un sac contenant 5 boules dont 3 sont jaunes et 2 sont bleues, la probabilité de tirer une boule jaune est de $\frac{3}{5}$ car on a 3 « chances » sur 5 de tirer une boule jaune.

Notation : Si on appelle un événement E, on peut noter $p(E)$ pour parler de la probabilité de l'événement E, pour gagner du temps ! On prononce « p de E ».

Propriété : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement.

Exemple : Si on lance 10 fois un dé, on n'aura pas forcément de 6 ! Cependant, plus on va répéter l'expérience, plus on se rapprochera d'un nombre égal à la probabilité de l'événement « avoir un 6 », qui est d'une chance sur 6, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.

Propriété : Quand les résultats d'une expérience aléatoire sont équiprobables, la probabilité d'un événement est égale au quotient : $\frac{\textbf{nombre de résultats favorables}}{\textbf{nombre de résultats possibles}}$

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 5 ?

Les issues « obtenir 1 », « obtenir 2 »,« obtenir 3 », « obtenir 4 »,« obtenir 5 »,« obtenir 6 » ont la même probabilité.

Les résultats favorables à l'événement « obtenir un nombre strictement inférieur à 5 » sont : « obtenir 1 »,« obtenir 2 », « obtenir 3 », « obtenir 4 ». Le nombre de résultats favorables est donc 4.

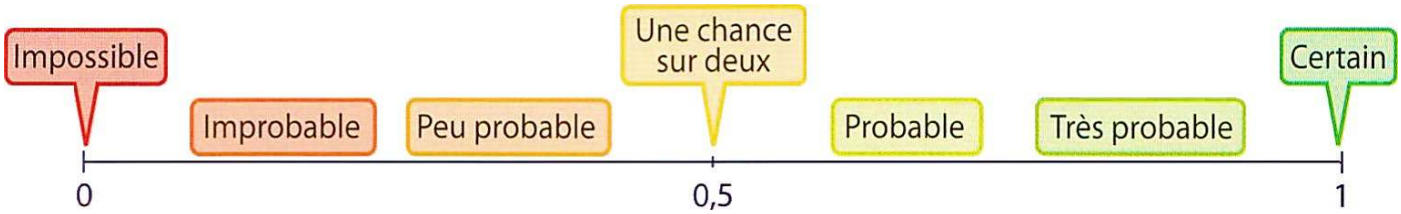
La probabilité est donc de $\frac{4}{6}$. (On dit aussi naturellement j'ai 4 chances sur 6 d'avoir un nombre strictement inférieur à 5)

Propriété : Si p est la probabilité d'un événement alors $1-p$ est la probabilité de son événement contraire.

Exemple : Un sac contient des boules blanches et noires. La probabilité de l'événement « obtenir une boule noire » est de $\frac{2}{5}$.
L'événement contraire est « obtenir une boule blanche » a comme probabilité $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

Définitions :

- On dit qu'un événement est **certain** lorsque cet événement est sûr de se produire.
  Sa probabilité est donc de **1**.
- On dit qu'un événement est **impossible** lorsque cet événement est sûr de ne pas se produire.
  Sa probabilité est donc de **0**.



Propriétés :

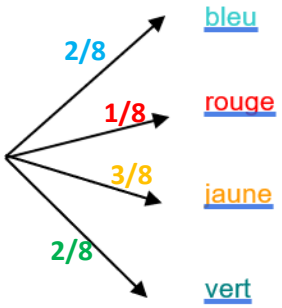
- La probabilité d'un événement **est toujours comprise entre 0 et 1.**
- La somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à 1.

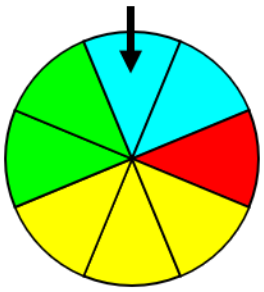
Définition : On dit que deux événements sont indépendants quand le « premier événement n'influence pas le second ».

Exemple : On lance un dé. Le premier événement est *« j'obtiens 1 au premier lancé »* et le second est *« j'obtiens 2 au 2e lancer ».* Que le premier événement se produise ou non, la probabilité que le 2e événement se produise est la même, donc les événements sont indépendants.

Remarque : On peut présenter les issues d'une expérience aléatoire dans ce qu'on appelle un arbre de probabilité.

Exemple : Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des probabilités :



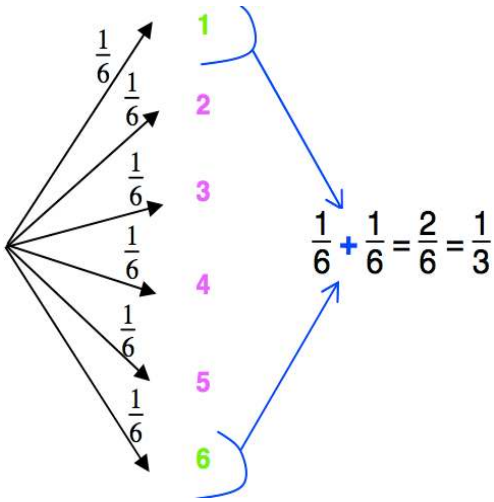


Exercice : On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit ***E*** l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ». On gagne au jeu si l'événement ***E*** se réalise.

a) Quelle est la probabilité de gagner ?

Chaque issue a la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6. Ainsi $P(\boldsymbol{E}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. La probabilité que l'événement ***E*** se réalise est de $\frac{1}{3}$.
Il y a donc une chance sur trois de gagner.



b) Quelle est la probabilité de perdre ?

Calculer la probabilité de perdre revient à calculer la probabilité que l'événement ***E*** ne se réalise pas. Il s'agit de l'événement contraire de l'événement ***E***, et on le note $\overline{\boldsymbol{E}}$.

- 1ère possibilité : On sait que $P(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{3}$ donc $P(\overline{\boldsymbol{E}}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
  Il y a donc deux chances sur trois de perdre.

- 2ème possibilité : L'évènement contraire $\overline{\boldsymbol{E}}$ est « La face du dessus est un 2 , 3 , 4 ou 5 ». Donc $P(\overline{\boldsymbol{E}}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
  Il y a donc deux chances sur trois de perdre.