Résolution d'équations

I. Rappels sur la résolution d'équations.

Définitions :

- Une équation est une **égalité** qui comporte au moins un nombre inconnu. Ce nombre est désigné par une lettre et est appelé l'**inconnue**.
- Lorsque l'on remplace l'inconnue d'une équation par un nombre qui rend l'égalité vraie, alors ce nombre est une **solution** de l'équation. Certaines équations n'en possèdent qu'une seule, une infinité, ou alors aucune !
- **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Exemple : $2x + 3 = 11$ est une équation d'inconnue x. Le chiffre 4 est une solution de cette équation.
En effet, si l'on remplace x par 4 dans le membre de gauche, on obtient : $2 \times 4 + 3$, ce qui fait bien 11.

Propriétés (admises) : Pour résoudre une équation, on peut :

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation ;
- Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les membres de l'équation.

Méthode : Pour résoudre un problème, on peut suivre le plan suivant :

- Modélisation (Choix de l'inconnue ; Traduction des données de l'énoncé à l'aide de l'inconnue ; Mise en équation)
- Résolution de l'équation ;
- Interprétation du résultat et vérification.

Opérations de base : Résoudre les équations suivantes :

$x - 3 = 9$ $x =$ $x =$	$x + 8 = 12$ $x =$ $x =$	$x \times 2 = 28$ $x =$ $x =$	$\frac{x}{8} = 3$ $x =$ $x =$

Exemple de résolution d'équations :

$3x + 5 = 17$	$2x + 9 = 24 - 3x$

II. Équations « produit nul »

Vocabulaire : Soit deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ de la variable x.
Toute équation de la forme $A(x) \times B(x) = 0$ est appelée équation « produit nul ».

Propriété : Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.

❖ Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$

❖ Réciproquement, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Démonstration :

❖ La première partie de la propriété est évidente.

❖ Si $a \times b = 0$, on envisage deux cas.

Premier cas : supposons que a est nul. La propriété est alors démontrée.

Second cas : supposons que a est non nul. On peut alors diviser l'équation par a. Donc $\frac{a \times b}{a} = \frac{0}{a}$ ainsi $b = 0$.

Conclusion : soit c'est a qui est nul (1er cas), soit c'est b qui est nul (2ème cas), soit les deux !

Exemple d'application : Résoudre l'équation : $(3x-5)(2x+4)=0$. On reconnaît ici une équation « produit nul ». Or, si un produit est nul, alors un au moins de ses facteurs est nul (et réciproquement).

Soit …….	Soit …….
Donc l'ensemble des solutions possibles est :	

III. Résoudre une équation du type $x^2 = a$

Propriété : Soit a un nombre.

- Si $a > 0$, alors les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors la solution de l'équation $x^2 = a$ est 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Démonstration : L'équation $x^2 = a$ peut également s'écrire $x^2 - a = 0$.

- Si $a > 0$, $x^2 - a = 0 \leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0 \leftrightarrow x = \sqrt{a}$ *ou* $x = -\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, $x^2 - 0 = 0 \leftrightarrow x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$.
- Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution comme on peut le voir graphiquement.

Exemples :

L'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : $\sqrt{9} = 3$ et $-\sqrt{9} = -3$.

L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

L'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution : 0.

L'équation $x^2 = -1$ n'a aucune solution.

